Singulatités isolées & développements de Laurent

Exercice

Soit $P \in \mathbf{C}[Z] - \mathbf{C}$ et $f \in \mathcal{O}(D^*(z_0, r))$. Montrez que f et $P(f)$ ont le même type de singularités en z_0.

Exercice

Montrez que si z_0 est une singularité isolée non effaçable d'une fonction holomorphe f alors c'est une singularité essentielle de e^f.

Exercice [$Aut(\mathbf{C})$]

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ non constante.

1. Montrez que $\tilde{f} : z \mapsto f(1/z)$ a une singularité non effaçable en 0.
2. Montrez que $\tilde{f}$ a un pôle si et seulement si f est polynomiale.
3. Montrez que si f est un automorphisme (= biholomorphisme) de $\mathbf{C}$ alors f est polynomiale
4. Déduisez-en que les automorphismes de $\mathbf{C}$ sont les applications affines (non constantes).

Exercice [$Aut(\mathbf{C}^*)$]

Montrez que les automorphismes de $\mathbf{C}^*$ sont les trasnformations de la forme $z \mapsto az$ et $z \mapsto a/z$.

Exercice [Birkhoff en rang 1]

Soient $a \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$

1. Montrez qu'il existe $0 < r < R < +\infty$ tels que a n'ait pas de zéros ou de pôles dans la couronne $C(0, r, R)$.
2. En considérant la dérivée logarithmique de a montrez qu'il existe une unique factorisation $a(z) = a_0(z)a_1(z)a_\infty(z)$ avec
   — $a_0 \in \mathcal{O}(D(0, R)$ et $a_0(0) = 1$,
   — $a_1(z) = cz^m$ pour $c \in \mathbf{C}$ et $m \in \mathbf{Z}$,
   — $a_\infty \in \mathcal{O}(\mathbf{C} - D(0, r))$ et $a_\infty(\infty) = 1$.

Exercice [Bessel]

Pour $w \in \mathbf{C}$, on considère la fonction $f_w(z) = \exp\left(\frac{w}{2}(z - z^{-1})\right)$ et son développement de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} J_n(w) z^n$. Montrez que

1. $J_{-n}(w) = J_n(w)$
2. $J_n(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - w \sin\theta) d\theta$
3. $J_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\theta - w\sin\theta} d\theta$,
4. $J_n \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ et
$$J_n(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(w/2)^{2k+|n|}}{(|n| + k)!}$$
5. J_n est solution de l'équation différentielle
$$w^2 \frac{d^2y}{dw^2} + w \frac{dy}{dw} + (w^2 - n^2)y = 0.$$